

# Problem dostępności algorytmicznej struktur społecznych na przykładzie sporu o moc obliczeniową wolnego rynku

**1.1.** Według wierzeń komputacjonistów, człowiek został stworzony na obraz i podobieństwo komputera. Oczywiście, cyfrowego, bo analogowego nie darzą komputacjoniści szczególnym kultem. Jeśli przyjąć ten pogląd, to trzeba się też zgodzić, że prawem symetrii, właściwej stosunkom odwzorowania, komputer może imitować zachowania człowieka; nazywamy to symulacją zachowań komputerową lub cyfrową.

Nauki społeczne mają jednak pod adresem symulacji większe oczekiwania. Przedmiotem ich badań nie są pojedynczy ludzie lecz systemy czyli układy czyli struktury, których elementami, pozostającymi w niezliczonych interakcjach, są ludzie. Do zbioru takich struktur należy rynek. Pod adresem rynku i innych struktur społecznych rodzą się następujące pytania.

P-1. Pytanie. Czy zachowania ludzi charakteryzują się zależnościami, z których wszystkie są funkcjami obliczalnymi?

Dla celów dalszej dyskusji, rozważmy następującą hipotezę roboczą.

H-1. Hipoteza. **Wszystkie zależności właściwe ludzkim zachowaniom dadzą się ująć jako funkcje obliczalne.**

P-2. Pytanie. Czy wszystkie funkcje obliczalne określające zachowania ludzkich indywiduów dadzą się efektywnie wyliczyć, a więc i symulować komputerowo? Do tego konieczne są odpowiednio szybkie algorytmy, utożsamiane z procedurami działającymi w czasie wielomianowym. Stąd pytanie: czy dla każdego problemu w badaniach społecznych dysponujemy takimi algorytmami?<sup>1</sup>

H-2. Hipoteza. **Dla każdego problemu w badaniu indywidualnych zachowań ludzkich dysponujemy algorytmami dostatecznie szybkimi, żeby w drodze symulacji komputerowej rozwiązać go w osiągalnym dla nas czasie.**

P-3. Pytanie. Czy wzrost złożoności przy przejściu od indywiduów jako elementów struktur społecznych do owych struktur, powstających w wyniku relacji między elementami, w szczególności niezliczonych interakcji i sprzężeń zwrotnych, nie pociąga wzrostu złożoności algorytmicznej, zwanej też obliczeniową, jak np. pojawienie się algorytmów z czasem wykładniczym?<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Działanie komputera polega na liczeniu, stąd symulacja wymaga dostarczenia mu przepisów liczenia zwanych *algorytmami*. Algorytm bierzemy z takiej teorii matematycznej, która daje środki do rozwiązania naszego problemu. Jeśli jest to np. pytanie, jakie ryzyko warto ponieść dla sukcesu, który jest możliwy ale nie jest pewny, to po algorytm sięgniemy do teorii prawdopodobieństwa. Jeśli problemem jest zaprojektowanie toru pocisku, wchodzi w grę matematyka obecna w klasycznej mechanice. Poprzez opis matematyczny, który abstrahuje od okoliczności dla rozwiązania nieistotnych, co upraszcza liczenie, konstruujemy pewien obiekt abstrakcyjny – schematyczny obraz realnego. Taki schemat to *model matematyczny* realnego procesu lub struktury, w której zachodzą dane procesy. Strukturą jest układ słoneczny, określone środowisko przyrodnicze, grupa społeczna czy instytucja, państwo, wolny rynek itd. O różnych zaś rodzajach algorytmów będzie mowa dalej.

<sup>2</sup> Struktury społeczne, w odróżnieniu od przyrodniczych, tym się charakteryzują, że zachodzą w nich procesy przetwarzania informacji (wiedzy) związane z podejmowaniem decyzji. Podmiotami wiedzy i decyzji są zarówno elementy struktury (obywatele państwa, uczestnicy rynku, wierni w grupie wyznaniowej itd) jak też struktury jako całości (mówimy „państwo wydaje wojnę”, „Kościół wie, jak nawracać pogan” czy „rynek reaguje aprecjacją złotego”). Na problematykę nauk społecznych składają się interakcje procesów infor-

H-3. Hipoteza. **Wzrost złożoności przy przejściu od indywidualów do struktur powstających w wyniku relacji między elementami, w tym interakcji i sprzężeń zwrotnych, nie pociąga wzrostu złożoności algorytmicznej.**

Celem obecnych rozważań jest ustalenie, jakich przesłanek należy dostarczyć, żeby obronić hipotezę H-3 w odniesieniu do wolnego rynku. Streszczając, otrzymujemy ją w tej postaci, że **istnieją szybkie algorytmy do symulacji wszelkich procesów rynkowych.**

Z powyższego układu pytań i odpowiedzi widać, że warunkiem koniecznym spełnienia H-3 jest spełnienie H-2, a warunkiem koniecznym dla H-2 jest H-1. Jeśliby więc H-1 lub H-2 okazało się zdaniem fałszywym, nie da się obronić H.3. Oprócz tych warunków koniecznych zachodzą jeszcze inne, związane z możliwościami pomiaru zjawisk, które mają być poddane symulacji. Ogół takich warunków obejmujemy pojęciem dostępności algorytmicznej, definiowanym w ustępie 2.1.

W rozważaniach nad powyższymi hipotezami będzie potrzebne odpowiednio pojemne pojęcie maszyny, tak pojemne, żeby zmieściły się w nim zarówno organizmy jako i pewne struktury społeczne. w szczególności rynek.

Nazwiemy jakąś strukturę *maszyną*, gdy (A) zachodzą w niej procesy rozgrywające się w czasie, (B) jest ona urządzeniem przynajmniej w części fizycznym, (C) każda zachodząca w niej zależność podpada pod jakąś funkcję matematyczną, (D) odpowiednio dużą część tych funkcji stanowią funkcje obliczalne.

Warunek A odróżnia maszyny od algorytmów, które np. w kontekście dyskusji nad maszynami Turinga, też bywają nazywane maszynami. Warunek B sformułowany jest tak oględnie, żeby można było rozważać procesy zachodzące w sferze świadomości, które trudno zaliczyć do fizycznych (bez wdawania się w mało konkluzywne kontrowersje). Warunek C jest tym który usprawiedliwia użycie terminu „maszyna” (o czym niżej). Nieostrość warunku D nie będzie szkodliwa, gdy przejdzie się do konkretnych zastosowań; „odpowiednio duża część” to taka, przy której możliwe są ujęcia ilościowe w poddanej określone badaniu sfery rzeczywistości.

Punkt C w określeniu maszyny mieści się w tym nurcie myślowym, który próbuje ujęcia całej rzeczywistości w kategoriach matematycznych. Najwybitniejszym jego rzecznikiem był Leibniz, który organizmy zaliczał do maszyn choć zarazem kreślił ostrą linię demarkacyjną między nimi a maszynami będącymi dziełem człowieka. Tę linię wyznaczała nieskończoność, co przy pewnej interpretacji współczesniającej da się wyrazić jako nieobliczalność. Współcześnie idea ta pojawia się u Alana Turinga w jego pracy z roku 1939. Jak zauważa Hodges (2002), Turing (1939) używał tam słowa „maszyna” dla określenia obiektów, które w swych operacjach tylko częściowo są mechaniczne, a dla czysto mechanicznych przeznaczył termin „maszyny automatyczne”.<sup>3</sup>

Słowa „maszyna” było w tym kontekście nie do uniknięcia, chodziło bowiem o maszynę Turinga zdefiniowaną w 1936, ale zaopatrzoną w dodatkową zdolność, którą Turing nazywał *wyroczną*. Zdolność ta polega na znajdowaniu wartości funkcji nieobliczalnej, a jej empirycznym przykładem jest – według Turinga 1939 – rozpoznawanie prawdziwości zdania gödłowskiego. Jeśli taką zdolność ma pojedynczy umysł czy (jak kto woli) mózg ludzki, to nie można wykluczyć, że mają ją pewne struktury złożone z mózgow czy umysłów, powiązane na podobnej zasadzie jak komputery w procesach obliczania rozproszonego (dispersed computing). Ta koncepcja maszyny musiała zyskać także

---

macyjnych i decyzyjnych zachodzące w stosunkach (a) między daną strukturą i jej elementami, (b) między elementami wewnątrz danej struktury, (c) między różnymi strukturami branymi jako całości (np. stosunki międzynarodowe).

<sup>3</sup> Hodges pisze: Turing used the word 'machine' for entities which are only partially mechanical in operation, reserving the term 'automatic machine' for those which are purely mechanical.

aprobate Alonzo Churcha, który był promotorem pracy z roku 1939, będącej rozprawą doktorską Turinga; ma więc ona mocne historyczne oparcie. Obecnie nawiązują do niej Hodges i Penrose.

Warunki występujące w powyższej definicji maszyny zostaną szerzej omówione w odcinku 2 przy okazji definicji dostępności algorytmicznej.

Nim do niej przejdziemy, wykorzystajmy dotychczasowe ustalenia dla uzyskania pewnego morału należącego do metodologii nauk społecznych. Toczy się w niej od stu przeszło lat spór o to, czy i na ile zachodzi podobieństwo metodologiczne nauk społecznych do przyrodniczych. W tych drugich zależności są matematyzowalne, co jest warunkiem koniecznym symulacji cyfrowej. Najbardziej skrajne stanowisko głosi, że wszelkie zależności społeczne są matematyzowalne, przy czym (dodają komputacjoniści) matematyzowalność pociąga praktyczną (tzn. na miarę naszych problemów) algorytmizowalność. Stanowisko zajęte w obecnych rozważaniach jest podwójnie umiarkowane, mianowicie: *tylko niektóre zależności społeczne są matematyzowalne i tylko niektóre z tych drugich są praktycznie algorytmizowalne*.

Czy w tym obszarze zagadnień praktycznie algorytmizowalnych mieszczą się problemy ekonomiczne, które spontanicznie, intuicyjnie, są rozwiązywane w procesach rynkowych? Zauważmy, że w tych procesach pewne informacje przetwarzane na potrzeby decyzji dotyczą czynnika przyrodniczego (zasoby surowcowe, stany pogody etc), inne dotyczą wiedzy (informacji) i dążeń (decyzji) innych uczestników struktur, a więc czynnika humanistycznego. Czynniki przyrodniczy z reguły poddaje się pomiarom, humanistyczny jest trudno mierzalny. co tworzy barierę dla dostępności algorytmicznej. Istnieje jednak taka struktura, w której czynniki humanistyczny podlega w pewnym stopniu samorzutnemu pomiarowi w wyniku interakcji jej uczestników. Jest to struktura powstająca w procesie wymiany dóbr, którego najpełniejszą postacią jest operujący pieniądzem wolny rynek. Miarą kierunku i siły dążeń jest cena, jaką dany uczestnik gry rynkowej gotów jest zapłacić za dane dobro.

Z tego względu rozważania nad rynkiem są dla metodologii nauk społecznych ważnym polem doświadczalnym. Następny odcinek daje charakterystykę dostępności algorytmicznej jako podstawę dla tego rodzaju rozważań (spotykamy ją, choć nie pod tą nazwą, w problematyce „complex systems” – por. niżej przypis 13).

**2.** W badaniach społecznych posługujących się symulacją cyfrową interesują nas takie struktury, które są maszynami (w określonym wyżej znaczeniu) spełniającymi pewien zespół warunków. Ten zespół warunków nazywał będę dostępnością algorytmiczną. Oto jej składniki.

Badaną strukturę nazwiemy *dostępną algorytmicznie*, gdy problemy występujące w jej badaniu spełniają następujące warunki. [1] Problem jest *rozstrzygalny* za pomocą jakiegoś algorytmu. [2] Algorytm jest *efektywny* praktycznie czyli dający się zrealizować przy osiągalnych zasobach czasu, pamięci, liczby procesorów itp, czego wskaźnikiem jest jego wykonalność w czasie wielomianowym.<sup>4</sup> [3] Dane wejściowe pochodzące z pomiarów mają dokładność, która wystarcza do rozwiązania problemu, a zarazem [4] nie wymaga nieosiągalnych (np. z powodu gigantycznej liczby miejsc po przecinku) zasobów czasu i miejsca. Jeśli badanie służy celom praktycznym, dochodzi

<sup>4</sup> Algorytm jest wykonalny w czasie wielomianowym, gdy czas wykonania, mierzony liczbą kroków jest funkcją wielomianową długości ciągu stanowiącego dane wejściowe. Tzn. dla ciągu o długości  $x$  czas wykonania jest określony wielkością będącą jakąś potęgą liczby  $x$ . Algorytm wielomianowy uznawany jest za szybki. Wolny jest algorytm, który musi się uporać z problemem zaliczanym do opornych (ang. *intractable*). Pracuje on w czasie wykładniczym, tzn. czas pracy jest funkcją wykładniczą długości ciągu wejściowego. Funkcja taka ma postać  $y = a^x$ , gdzie  $x$  wyraża długość ciągu wejściowego, zaś  $a$  jest pewną stałą charakteryzującą dany proces. Typowym przykładem takiego algorytmu jest procedura rozstrzygania o tautologiczności formuły rachunku zdań, gdzie  $x$  jest liczbą nierównokształtnych zmiennych w formule, zaś  $a$  jest liczbą wartości logicznych.

warunek [5]: wynik obliczeń ma być gotowy, gdy jest potrzebny do sterowania procesami w danej strukturze, np. podejmowania decyzji; jest to *dostępność algorytmiczna w czasie realnym*.

Pewne cechy z tej listy są stopniowalne, jak osiągalność zasobów (punkty 2 i 4) oraz wykonalność w czasie wielomianowym. Różne funkcje wielomianowe wyznaczają różne czasy wykonania algorytmu, a im krótszy czas, tym bardziej jest dostępna algorytmicznie struktura, do której ów algorytm stosujemy. Podobnie co do zasobów czasu, pamięci itd; są one bardziej lub mniej osiągalne, co też wprowadza stopniowalność do pojęcia dostępności.

Do centralnych dziś zagadnień dostępności algorytmicznej należy pytanie, czy ma tę cechę mózg. W tym zawiera się pytanie, czy rozwiązując problemy zawsze pracuje on algorytmicznie? Jeśli tak, to czy w czasie wielomianowym? Odpowiedź twierdząca, gdy dać ją w każdym z punktów definicji dostępności, jest stanowiskiem komputacjonizmu w zagadnieniu tzw. „silnej sztucznej inteligencji”. W naukach zaś społecznych doniosłą kwestią jest to, czy – prócz takich jak mózg indywidualnych podmiotów rozwiązujących problemy – istnieją zbiorowe podmioty rozwiązywania problemów. Np. urządzeniem do przetwarzania informacji pod kątem problemów jest pojedyncza mrówka; a czy jest takim urządzeniem całe mrowisko?

Wśród wybitnych badaczy, którzy uznawali istnienie struktur społecznych będących kolektywnymi podmiotami przetwarzania informacji znaleźli się Oskar Lange i Friedrich Hayek. Obaj zgadzali się, że taką strukturą jest rynek. Przy tym wspólnym punkcie wyjścia, ich drogi rozchodzą się w przeciwnych kierunkach, gdy staje problem dostępności algorytmicznej rynku. Lange bronił zdecydowanie stanowiska komputacjonistycznego, Hayek je zdecydowanie atakował.

Świadectwem komputacjonizmu Langego jest sposób, w jaki uzasadniał on przewagę socjalistycznej gospodarki centralnie planowanej nad gospodarką wolnorynkową. Przyjmując pewnik, że partia ludu pracującego wie, jak gospodarzyć dla dobra ludu, musiał uporać się z zarzutem, że gigantyczna wielość i złożoność danych ekonomicznych, które trzeba w partii przetworzyć w celu podjęcia trafnych decyzji, przewyższa możliwości kalkulacyjne najpotężniejszych zespołów rachmistrzów. Na to Lange [1967] odpowiadał pytaniem adresowanym do Hayeka (nawiązując do swego polemicznego eseju [1936]): „w czym problem?” Problem, jego zdaniem skończył się wraz z pojawieniem się maszyn cyfrowych, które dalece górują sprawnością nad staroświecką maszyną obliczeniową, jaką jest rynek.<sup>5</sup>

Stanowisko Langego w cytowanym artykule nie jest jednoznaczne. Twierdzi on stanowczo w kilku miejscach, że komputer przewyższa niepomniernie rynek jako maszynę liczącą, gdy idzie o szybkość pracy, ale pod koniec (odcinek IV) pojawia się passus, w którym tenże Lange powiada: bywają problemy tak złożone, że komputer sobie z nimi nie poradzi, czy to z powodu rodzaju wchodzących w grę równań (może miał na myśli równania nieliniowe), czy też z powodu ogromu zbioru danych (economic commodities), a wtedy trzeba będzie zastosować do obliczeń maszynę, jaką jest rynek.<sup>6</sup>

<sup>5</sup> "Were I to rewrite my essay today my task would be much simpler. My answer to Hayek and Robbins would be: so what's the trouble? Let us put the simultaneous equations on an electronic computer and we shall obtain the solution in less than a second. The market process with its cumbersome tatonnements appears old-fashioned. Indeed, it may be considered as a computing device of the preelectronic age." Równania, o których tu mowa dotyczące zrównoważenia podaży i popytu, pochodzą od Walrasa, Pareto i Barona.

<sup>6</sup> Jest to następujący passus. "All this, however, does not mean that the market has not its relative merits. First of all, even the most powerful electronic computers have a limited capacity. There may be (and there are) economic processes so complex in terms of the number of commodities and the type of equations involved that no computer can tackle them. Or it may be too costly to construct computers of such large capacity. In such cases nothing remains but to use the old-fashioned market servo-mechanism which has a much broader working capacity."

Jest to wypowiedź osobliwie trudna do zinterpretowania. Jak pogodzić pogląd, że komputer rozwiązuje problemy szybciej niż rynek z poglądem, że tam gdzie komputer sobie nie poradzi, rynek sobie poradzi? Wszak jeśli problem jest rozstrzygalny (a jest, skoro rozstrzygnie go rynek), to nie-radzenie sobie polega nie na tym, że maszyna nie potrafi dać odpowiedzi, ale na tym, że dałaby ją np. dopiero po milionie lat. Skoro rynek sobie w takim przypadku poradzi, to znaczy, że potrafi liczyć istotnie szybciej niż komputer – wbrew głównej tezie omawianego tekstu.

Pogląd Langego, że komputer, rozwiązując błyskawicznie równania Pareto, szybciej niż wolny rynek rozwiązuje problem zrównoważenia podaży i popytu, należy przetłumaczyć na obecny język, jak następuje. Równania te stanowią model matematyczny rynku, ich rozwiązanie daje zatem wiedzę, jak zachowa się model w określonych warunkach, a gdy jest to model właściwie dobrany, da nam to wiedzę o odpowiednich zależnościach w modelowanej dziedzinie gospodarki. Żeby komputer rozwiązał owe równania, musi być stosownie zaprogramowany. Program jest pewnym algorytmem (zapisanym w języku programowania); nazwijmy go AS (S – od „planowanie socjalistyczne”). Powiemy, że AS *symuluje* procesy gospodarcze modelowane równaniami Pareto.

Wprowadziwszy w ten sposób pojęcie algorytmu, potrafimy zadać pytanie dotyczące własności algorytmu AS, żeby porównać je z własnościami tego algorytmu, według którego pracuje rynek jako system przetwarzania informacji. Sam Lange nie byłby w stanie odpowiadać na tego rodzaju pytania, ponieważ *teoria złożoności obliczeniowej*, stworzona do tego, żeby sobie z nimi radzić, została opublikowana (Hartmanis i Stearns [1965]) w roku jego śmierci (1965)<sup>7</sup>

Mamy jednak pewien trop interpretacyjny pomocny w dalszej dyskusji. Fakt, że Lange miał na uwadze maszyny cyfrowe z lat 60-tych i że przed rokiem 1965 nie prowadzono badań teoretycznych nad maszynami o większych niż tamte możliwościach obliczeniowych (poza prekursorską, ale przejściowo zapomnianą, pracą Turinga [1939]), pozostaje przyjąć, że algorytm AS powinien być wykonalny na uniwersalnej maszynie Turinga w jej wyjściowej wersji, opisanej w przełomowej pracy Turinga [1936]; będzie ona dalej oznaczana skrótem UMT/36; z tą koncepcją będą tu porównywane koncepcje Hayeka.<sup>8</sup>

<sup>7</sup> Kluczowy w tej teorii jest problem stouunku między klasami złożoności obliczeniowej, które określa się skrótowo jako P i NP. Klasa P to zbiór problemów rozwiązywalnych w czasie wielomianowym (ang. polynomial) przez deterministyczną maszynę Turinga. Klasa NP to zbiór problemów rozwiązywalnych w czasie wielomianowym przez nie-deterministyczną (N od nondeterministic) maszynę Turinga. Ta druga może być symulowana przez pierwszą, mają więc te same możliwości, ale druga jest szybsza, ponieważ wykonuje obliczenia na wielu ścieżkach naraz i akceptuje wynik, gdy go znajdzie na przynajmniej jednej ścieżce. Ekwiwalentem tego zwielokrotnienia ścieżek jest przyspieszające procedurę uzyskanie pewnej dodatkowej informacji. Np. algorytm porządkowania (inaczej, sortowania) zbioru n elementów wymaga co najwyżej  $n^2$  kroków (porównanie każdego elementu z każdym), ale kiedy mamy już wynik porządkowania, a więc dodatkową informację, to pytanie, czy wynik jest poprawny wymaga tylko sprawdzenia, czy każdy element jest na właściwym miejscu. Jest to więc znowu czas wielomianowy (w tym przypadku mniejszy niż w pierwotnym problemie sortowania). Każdy N-problem jest zarazem NP-problemem, bo skoro rozwiązanie da się uzyskać w czasie wielomianowym, to (tym bardziej) gotowy już wynik można sprawdzić w czasie wielomianowym. Pytanie otwarte, a mające dla teorii złożoności fundamentalną doniosłość, to pytanie, czy klasa NP zawiera się w P. A więc, jeśli rozwiązanie jakiegoś problemu da się sprawdzić w czasie wielomianowym, to czy dojście do tego rozwiązania też da się otrzymać w czasie wielomianowym? Problem ten zapisuje się skrótowo jako pytanie: P=NP? Miałby on zastosowanie przy bardziej (niż obecne) zaawansowanych technicznie rozważaniach nad algorytmami w centralnym planowaniu; obecnie wystarczy go odnotować – do uwzględnienia w dalszych badaniach.

<sup>8</sup> Przystępnym ujęciem ukazującym istotę wyniku Turinga z jego pracy 1936 jest np. frapująco napisany rozdział 2 w książce Andrew Hodgesa [2002]. Tegoż Hodgesa zwięzły życiorys Turinga z opisem maszyny Turinga jest dostępny pod adresem [www.turing.org.uk/turing/bio/part3.html](http://www.turing.org.uk/turing/bio/part3.html), a wykład "Uncomputability in the work of Alan Turing and Roger Penrose" pod adresem [www.turing.org.uk/philosophy/lecture1.html](http://www.turing.org.uk/philosophy/lecture1.html).

3. W stanowisku Hayeka na pierwszy plan wysuwa się operatywność informatyczna rynku biorąca się stąd, że ilość danych do przetwarzania zostaje zmniejszona do absolutnego minimum dzięki syntetycznej informacji zawartej w cenach. Pisał on [1945], co następuje.<sup>9</sup>

Jeśli chcemy zrozumieć rzeczywistą funkcję systemu cen, musimy patrzeć nań jako na mechanizm przekazywania informacji. Najbardziej w tym znamieną jest oszczędność informacji, którą operuje ten system, to znaczy to, jak mało potrzebują wiedzieć poszczególni uczestnicy rynku, żeby byli zdolni do prawidłowych działań. To jest coś więcej niż metafora, gdy określi się system cen jako system telekomunikacyjny.

Żeby rozwinąć myśl Hayeka o wolnym rynku jako systemie przetwarzania informacji, spróbujmy oddać jego intuicje w sprawie przewag wolnego rynku posługując się porównaniem z różnymi typami maszyn do przetwarzania informacji. Skoro Lange za wystarczającą do symulowania gospodarki uznał maszynę UMT/36, Hayekowi należy przypisać pogląd, że wolny rynek jest maszyną, dla której są dostępne algorytmicznie problemy niedostępne dla UMT/36. Pogląd ten da się wyrazić w terminach teorii złożoności obliczeniowej (por. przypis 5).

Podczas gdy badania logiczne prowadzą do ustaleń, które problemy są rozstrzygalne i które nie są, teoria złożoności zajmuje się badaniem, które z problemów rozstrzygalnych są rozwiązywalne efektywnie za pomocą obliczeń (*computationally tractable*). Efektywnie, to znaczy przy dostępnych zasobach: czasu, miejsca (pamięci) etc. Fundamentalnym wynikiem jest utożsamienie algorytmów szybkich z tymi, których czas pracy jest funkcją wielomianową objętości danych wejściowych, wolnych zaś z tymi, w których wchodzi w grę funkcja wykładnicza (por. przypisy 4 i 7).

Na tym gruncie powstaje rozległa klasa pytań będących dziś w centrum uwagi informatyków. Są to pytania o schemacie: czy dany problem, dla którego dysponujemy aktualnie tylko algorytmem pracującym powoli da się rozwiązać, jeśli zwiększymy w pewien istotny sposób sprawność maszyny Turinga, tak że dotychczasowy wolny algorytm da się zastąpić szybkim? Jest to więc zagadnienie, czy da się, i jakimi środkami, uczynić dostępnym obliczeniowo jakiś problem, który dotąd nie jest dostępny (por. warunek 2 w definicji dostępności algorytmicznej, odcinek 2).

Rekonstrukcja stanowiska Hayeka w sprawie wolnego rynku jako urządzenia obliczeniowego, które góruje nad systemem centralnego planowania, będzie polegać na tym, żeby rozpoznać w funkcjonowaniu rynku cechy właściwe maszynom efektywniejszym od maszyny UMT/36, którą miał na uwadze Lange. Te efektywniejsze mutacje pozwalałyby na sposoby przetwarzania informacji będące modelami wolnego rynku.

4. Hayek [1945] wskazał co najmniej jeden kierunek rozszerzenia modelu obliczeniowego poza sferę możliwości UMT/36. Mianowicie, używał on zwrotu „dispersed knowledge” do opisanie, skąd biorą się przewagi rynku nad centralnym planowaniem.<sup>10</sup>

<sup>9</sup> "We must look at the price system as ... a mechanism for communicating information if we want to understand its real function.... The most significant fact about this system is the economy of knowledge with which it operates, or how little the individual participants need to know in order to be able to take the right action.... It is more than a metaphor to describe the price system as ... a system of telecommunication."

<sup>10</sup> "The peculiar character of the problem of a rational economic order is determined precisely by the fact that the knowledge of the circumstances of which we must make use never exists in concentrated or integrated form but solely as the dispersed bits of incomplete and frequently contradictory knowledge which all the separate individuals possess. The economic problem of society is thus not merely a problem of how to allocate "given" resources—if "given" is taken to mean given to a single mind which deliberately solves the problem set by these "data." It is rather a problem of how to secure the best use of resources known to any of the members of society, for ends whose relative importance only these individuals know. Or, to put it briefly, it is a problem of the utilization of knowledge which is not given to anyone in its totality."

Nie jest przypadkiem zbieżność terminu „dispersed” z postępowaniem informatyków, gdy definiują przy jego pomocy system maszyn realizujących *distributed computing* – przetwarzanie rozproszone. Charakterystyczna jest dlań relacja klient-serwer, dobrze znana m.in. z posługiwania się internetem. Istotne jest dla niej to, że zwalnia ona od gromadzenia wszystkich potrzebnych danych na jednej maszynie, odpowiedni bowiem protokół komunikacyjny pozwala dotrzeć do innej maszyny, choćby najbardziej odległej geograficznie (rozproszenie!) i od niej uzyskać potrzebne dane. W strukturze wolnego rynku analogiczną rolę pełni system cen (Hayek go nazywał systemem telekomunikacyjnym). Wiadomość o cenie ropy na giełdzie funkcjonuje jak link od innej maszyny (może nią być mózg dostawcy ropy), która po przetworzeniu niezliczonych danych prowadzących do takiej oto ceny przekazuje ów wynik każdej innej zainteresowanej maszynie; ponieważ ta ostatnia nie musi odtwarzać procesu prowadzącego do wyniku, daje to w obrębie całego systemu kolosalne oszczędności zasobów (pamięć itp). Przy tej analogii, postulat centralnego planowania brzmiałby jak żądanie likwidacji internetu i zastąpienia sieci jednym gigantycznym komputerem obsługującym cały świat. Wtedy jednak kolejka oczekujących na pobranie danych oraz kolejka tych, co chcą tam dane włożyć (co wymagałoby też procedury kontrolnej) tworzyłyby tak skomplikowane struktury, że zarządzanie nimi wymagałoby kolosalnych zasobów.

Podsumowując, mamy następujące twierdzenie.

[A] Wolny rynek jest maszyną do przetwarzania danych, dla której pewne struktury w gospodarce są dostępne algorytmicznie niż dla maszyny właściwej systemowi centralnego planowania (UMT/36), ponieważ rynek stosuje *przetwarzanie rozproszone*, a to jest realizowane przez algorytmy szybsze od stosowanych w systemie centralnego planowania.

Należy teraz po kolei brać na warsztat różne rodzaje przetwarzania danych, każdy rodzaj definiujący jakiś typ maszyny "mocniejszej" od UMT/36 i badać, czy rynek ma za model maszynę, dla której pewne struktury gospodarcze byłyby dostępne algorytmicznie niż dla tej proponowanej przez Langego.

[B] *Przetwarzanie równoległe* polega na tym, że problem zostaje rozdzielony na podproblemy, każdy rozwiązywany przez inny procesor, wyniki zaś są dostarczane do wspólnej pamięci i następnie syntetyzowane w rozwiązaniu głównego problemu. Jest do zbadania, czy ta procedura nadaje się jako odwzorowanie jakiegoś aspektu wolnego rynku. Może odpowiednikiem wspólnej pamięci i złączonego z nią procesora byłyby giełdy finansowe? Żeby dać wiarygodną odpowiedź, trzeba oddzielić rzeczywiste modelowanie od metafory. Jeśli da się obronić hipotezę, że modelem pewnego aspektu rynku jest przetwarzanie równoległe, to otrzyma się twierdzenie analogiczne do A, w którym „równoległe” wystąpi w miejscu słowa „rozproszone”.

[C] *Przetwarzanie interaktywne* ma szczególnie przekonujące podobieństwa do procesów rynkowych. Polega ono na tym, że zachowanie się struktury jest tylko w pewnym ogólnym schemacie zaprogramowane, czyli kierowane algorytmem, a poza tym zachowania zależą od bodźców idących od środowiska. Inteligentny pocisk np. nie ma trasy z góry ustalonej, lecz ją wybiera w zależności od dokonywanych obserwacji, w tym sensie wchodząc w interakcję z otoczeniem. Istotnie, jest to rys różniący rynek od centralnego planowania, w którym plan pełni rolę algorytmu wyznaczającego zachowanie się struktury na długi czas naprzód, bez możliwości natychmiastowego reagowania na nowe obserwacje. Taka reaktywność daje zwiększenie mocy obliczeniowej, ponieważ nie trzeba załadowywać pamięci dyrektywami na wszelkie ewentualności; do pamięci wejdzie w procesie uczenia się tylko to, co jest potrzebne. I tak dochodzimy znów do twierdzenia na wzór A, gdzie w miejsce słowa „rozproszone” będzie „interaktywne”.

[D] *Przetwarzanie na maszynie niedeterministycznej*. W odróżnieniu od oryginalnej UMT/36, jej wariant niedeterministyczny ma zbiór instrukcji, który w danym stanie maszyny nie przesądza jednoznacznie, jaki będzie następny ruch. [E] *Przetwarzanie na maszynie z wyrocznią* oznacza, że maszyna jest zaopatrzona w pewne dodatkowe informacje, które znajduje losowo. Nie wchodząc w techniczne definicje tych własności, zauważmy, że wspólne im jest istnienie dodatkowej informacji, pozbawionej jednak pewności. W jaki sposób taka sytuacja może skrócić czas rozwiązywania problemu? W wyjaśnieniu pomóc mogą porównania ze stawianiem hipotez w badaniach i z podejmowaniem ryzyka w decyzjach. Pomimo niepewności swych hipotez pomysłowy badacz, który je wysuwa i ewentualnie potem obala na rzecz innych, szybciej posuwa się w badaniach niż ten, kto czeka na jakąś niezawodną dedukcję z pewników. Podobnie w decyzjach, w szczególności gospodarczych: choć pewne działania skutkują bankructwem poszczególnych firm, gospodarka dopuszczająca takie bankructwa rozwija się szybciej niż taka, która gwarantuje w każdym przypadku pewność przetrwania. Tak dostajemy twierdzenia o kolejnych aspektach, w których rynek, symulowany maszynami wydajniejszymi niż UMT/36, góruje z informatycznego punktu widzenia nad gospodarką scentralizowaną.

**5.** W modelowaniu procesów rynkowych na osobną uwagę zasługuje [F] *przetwarzanie analogowe*. Jest to model, który oddaje szczególnie ważną różnicę między gospodarką rynkową i centralnie planowaną.

Jako istotny rys przetwarzania analogowego wymienia się ciągłość w odróżnieniu od nieciągłości czyli dyskretności przetwarzania cyfrowego. W obecnym rozważaniu skoncentrujemy się na fakcie, że organizmy i umysły są integralnymi składnikami systemu obliczeniowego przyrody, a ten operuje mechanizmami analogowymi. Drapieżnik, który napina mięśnie z siłą proporcjonalną do odległości dzielącej go od łupu, wykonuje obliczenie polegające na odwzorowaniu jednej wielkości fizycznej (droga) w innej (energia mięśniowa).

To samo potrafiłby wykonać robot zaopatrzony w odpowiednie receptory i efekторы; w tym przypadku obliczenie byłoby procesem cyfrowym, dającym się przedstawić na wydruku jako ciąg zer i jedynek. Po pierwsze jednak, nie wiadomo, czy algorytm mający sterować skokiem robota zdołałby pracować w czasie realnym, czego warunkiem jest, żeby nie był to czas wykładniczy (nie chcemy czekać na wynik obliczeń np. milion lat, gdy ich potrzebujemy w ułamku sekundy). Po drugie, to, czym dysponuje lew jako urządzeniem analogowym, wykształcone przez miliony lat ewolucji, jest już doskonale sprawdzone i skoordynowane z istniejącym ekosystemem przyrody. Równie dobrze wypróbowane i zgrane z ekosystemem społecznym urządzenia analogowe mają uczestnicy rynku.

W procesach rynkowych mamy do czynienia z wielką masą materiału cyfrowego niezbędnego do rozeznania i projektowania. ale jego powstanie możliwe jest dzięki temu, że „u samego dołu” znajduje się żywioł procesów analogowych, które w pewnym punkcie przejawiają się cyfrowo (w sprawie takiej konwersji por. Devlin [1992], Marciszewski [1995]). Jeśliby zlikwidować procesy analogowe, zabrakłoby też, powstających z konwersji, niezbędnych wskaźników cyfrowych. Tym opisem można oddać myśl przewodnią Hayeka o cenach w roli systemu telekomunikacyjnego. Cena pomarańczy jest wypadkową niezliczonych sprzężeń zwrotnych między procesami analogowymi u konsumentów i oferentów. Jako konsument przeżywam taki proces analogowy, gdy np. na jednym straganie oferują mi ładniejsze pomarańcze w cenie pięciu złotych za kilo, a na drugim gorsze lecz tańsze, po cztery. W moim mózgu zachodzi proces antycypowania smaku, którego odziorowaniem staje się stopień gotowości do zakupu towaru smaczniejszego nawet za wyższą cenę, gdyż ta antycypacja uprzytomnia przyjemność smakową tak silną, że wzbudza to analogicznie silną tendencję do zakupu, pokonującą tendencję przeciwną (do oszczędzenia złotówki). Decyzje oferentów co



do ceny towaru też wyrastają z podłoża różnych procesów analogowych, prowadzących do wyniku cyfrowego – żądanej ceny.

Wedle teorii centralnego planowania ceny nie powinny powstawać w sposób tak żywiołowy, ale być ustalane w wyniku kalkulacji dokonywanej przez państwo. Państwo czyniłoby to na podstawie danych o rzeczywistym popycie, jeśli planowanie ma się łączyć z respektowaniem ludzkich wyborów, albo na podstawie postanowień władz politycznych o tym, co powinno obywatelom smakować, co ma się im podobać itd. Uzyskiwanie danych o popycie byłoby w następujący sposób możliwe, nawet jeśli technicznie trudne, jeśli proces kształtowania się popytu w ludzkich mózгах miał charakter cyfrowy. Oto ilustrująca taką ewentualność wizja (utopijna przy obecnej technice, ale dająca się w zasadzie pomyśleć).

U obywateli we wnętrzu neuronów kłębią się kolosalne węże zer i jedynek (jeden z nich odawałby mój apetyt na pomarańcze o godzinie 11.47 dnia 1 czerwca 2002). Każdy obywatel ma implantowaną antenkę, która nieustannie śle radiowe sygnały o stanach popytowych do komputera w Centralnej Komisji Planowania. Ten oblicza, ilu obywateli ile złotych gotowych jest płacić za kilo pomarańczy i bilansuje to z możliwościami wydatków importowych państwa. Jeśli środków nie starczy, to trzeba podnieść cenę.

Sprawa się skomplikuje, jeśli wchodzące w grę procesy nie są cyfrowe lecz analogowe. Trzeba by wtedy ratować się konwersją sygnałów analogowych na cyfrowe, a więc montować jeszcze urządzenia do konwersji. Jeśli i to włączymy w ową fantastyczną wizję, to trzeba będzie oszacować, o ile bardziej skomplikują się przez to algorytmy do obliczania cen i wykazać, że nie wyjdą one poza złożoność wielomianową. Ponadto należałoby udowodnić, że zaokrąglenia wielkości analogowych przy konwersji nie zmieniają w sposób istotny przebiegu procesu (a więc że nie pojawi się nieliniowość) oraz że potrzebna tu dokładność nie prowadzi do tak wielu cyfr po przecinku, że uniemożliwi to maszynie pracę w czasie realnym (por. punkty 3, 4, 5 w definicji dostępności algorytmicznej, odcinek 2).

**6.** Biorąc pod uwagę procesy analogowe, napotykamy linię demarkacyjną między sferą bezpośrednio dostępną algorytmicznie i terenem w pewien sposób niedostępnym. Procesy analogowe prowadzące do ukształtowania się ceny same nie są mierzalne, a więc nie spełniają jednego z warunków koniecznych dostępności algorytmicznej. Ale skutkują one ustaleniem ceny, a więc wielkości, która od tego momentu może być brana pod uwagę w konstruowaniu modeli matematycznych i w symulacji komputerowej. Do tego jednak, żeby proces analogowy zaowocował określeniem podatnym na przetwarzanie cyfrowe, musi się dokonać ileś wyborów producentów, pośredników i konsumentów, a to może się dziać tylko w warunkach wolnego rynku.

Niech dopełni tego wątku anegdota historyczna z dziejów gospodarki w PRL w czasach późnego Gomułki. Funkcjonowała ta gospodarka według reguły sformułowanej przez Langego ([1936] i [1967]): niech rząd podnosi ceny, kiedy popyt przewyższa podaż, a obniża, gdy jest odwrotnie. To odwrotnie nigdy się nie zdarzało (co należało niejako do istoty gospodarki socjalistycznej, definiowanej po latach doświadczeń jako „gospodarka niedoboru”), ale dla naszego przykładu wystarczy człon pierwszy. Lange zalecał rozwiązywać w tym celu równania Pareto za pomocą maszyn cyfrowych, ale że skalę popytu (tasiemcowe kolejki) dało się obserwować gołym okiem, można było porzucić na prostszej metodologii. Podwyższano więc ceny, z czego się rodziły eksplozje społeczne o konsekwencjach gospodarczych, o których centralnemu planiście się nie śniło.

Regułę Langego rządy PRL udoskonaliły dodając pewien czynnik aprioryczny, w czym celował Władysław Gomułka. Mianowicie, podwyżki cen były kierowane nie tylko obserwacją nadmiernego popytu, lecz także pewnymi założeniami natury moralnej, co do tego, jaki popyt jest słuszny. Gomułka uważał np. za niesłuszny popyt na kolorowe rajstopy dzieciinne (jego wnuki poprzestawaly

na czarnych), na kuchnie z oknami (stąd wymyślił ciemne kuchnie), a w szczególności na kawę, której picie traktował jako inteligentną fanaberię, powiadając „robotnik nie musi żłopać kawy”. Nie poprzestał on na aforyzmach, ale obliczył, ile fabryk można wybudować za pieniądze wydawane na import kawy, i to jest w całej historii szczególnie pouczające.<sup>11</sup> Powstaje bowiem pytanie, kto by zdecydował o tym, jaką fabrykę kupić lub zbudować, czy np. telewizorów czy pralek. Skoro jeden człowiek uważał się za władnego decydować, co mają pić rodacy, on też będzie pretendował do rozstrzygnięcia, czy bardziej potrzebują telewizorów czy pralek. Jakie mogą być w takich sprawach pomysły doktrynerskiego dyktatora, to rzecz nieprzewidywalna. Jeszcze bardziej skrajny przypadek, ostatnie lata dyktatury Ceaucescu pokazuje, jak system centralnego planowania mający wprowadzić doskonałą przewidywalność prowadzi przez kaprysy despoty do zdarzeń z gruntu nieprzewidywalnych.

7. Wycieczka w sferę powiązań gospodarki z polityką ukazuje nowe warstwy złożoności, stanowiące wyzwanie dla symulacji komputerowej. Nawet jeśli model Pareto dostarcza trafnej metody liczenia, na ile podnieść ceny, żeby ograniczyć popyt do granic wyznaczonych możliwościami podaży, to model ten nie powie, jak długo ludzie będą wytrzymać takie równanie w dół. Tym mniej ma on do powiedzenia, gdy niecierpliwość obywateli bierze się nie tylko z ograniczeń materialnych, lecz także z imponderabiliów, jak potrzeba wolności wyboru dóbr czy sprawiedliwości w ich rozdzieleniu.

Losy polityczne Gomułki, jego gwałtowny i nieprzewidziany upadek w wyniku realizowania dyrektywy ekonomicznej Langego, to świadectwo istnienia tej nieobliczalnej strony ekonomii. Gdy śledzić następną lekcję historii, losy polityczne następcy Gomułki, mamy do czynienia z kolejną erupcją nieobliczalności, u której źródeł są kalkulacje wynikłe z wiary w centralne planowanie. Edward Gierek, pamiętny losów poprzednika, za motto swych rządów wzięło zaspokojenie popytu („aby ludzie żyli dostatniej”). A więc zwiększyć podaż miast ograniczania popytu. Jego polityka poprawy podaży wyszła z założenia, że trzeba zwiększyć moce produkcyjne przez inwestycje, a wobec braku środków, należy kapitał na inwestycje pozyskać w postaci kredytów z zagranicy. Ponieważ działo się to w systemie gospodarki planowej, można było dokładnie obliczyć, jakie zyski, w tym eksportowe, przyniosą owe inwestycje i jak spłaci się z nich we właściwych terminach zaciągnięte długi.

Wyzwolony Gierkowską polityką kredytów splot procesów gospodarczych i politycznych, przy udziale czynnika moralnego motywującego działania politycznej opozycji, przyniósł skutki, których żadną miarą nie dało się przewidzieć.<sup>12</sup> Najbardziej zaskoczyły one ówczesnych architektów gospo-

<sup>11</sup> O stosunku Gomułki do popytu na kawę pisał Paweł Machcewicz w artykule "Partia tak, kawa nie", *Polityka* nr 36, 7 września 2002, ss. 63-65.

<sup>12</sup> Warta jest tu przytoczenia reakcja wybitnego polskiego metodologa nauk społecznych, nieżyjącego już profesora Stefana Nowaka. W przerwie pewnego zebrania, na którym wydarzenia sierpnia 1980 w stoczni gdańskiej relacjonowali na gorąco doradcy komitetu strajkowego, miałem sposobność zamienić z nim kilka słów. Niezwykłość i nieprzewidywalność tego, co wtedy się w kraju działo była dla niego wielkim zaskoczeniem jako dla metodologa. Mówił ze zdumieniem: „tego nie była w stanie przewidzieć żadna teoria społeczna”. W to zakłopotanie niemocą nauki wplatał się zarazem jakby ton ukontentowania, że jako badacze stajemy przed wyzwaniem ze strony rzeczywistości tak wspaniale skomplikowanej. To wyzwanie złożoności struktur dynamicznych (*dynamics of complex systems*) zostało podjęte przez poszukiwanie modeli (dla interakcji społecznych) m.in. w tak zaawansowanych systemach przetwarzania informacji jak sieci neuronowe. Jako przykład może służyć praca: A. Nowak, R. Vallacher and E. Burnstein, "Computational social psychology: A neural network approach to interpersonal dynamics" w: Wim Liebrand, Andrzej Nowak and Rainer Hegselm (eds.) [1998] (jeden z autorów jest synem Stefana Nowaka).

darki planowej. Ostatecznie, w łańcuchu zdumiewających przyczyn i skutków, w którym odegrały też rolę niezwykle zdarzenia natury religijnej, doszło do zejścia tej gospodarki z historycznej sceny.

Jaki wniosek z tych doświadczeń ma wysnuć metodologia nauk społecznych? Czy pogodzić się z nieprzewidywalnością procesów i zdać się na czysto intuicyjne ich odgadywanie? Odpowiedź jest w tym, że do istoty efektywnego poznawania świata należy wspieranie się wzajemne intuicji i algorytmu. W naukach przyrodniczych odkrywcy matematycznie ujętych praw naukowych dostarczają nam algorytmów do obliczania wielkości fizycznych, np. siły grawitacji, lecz odkrycie grawitacji nie było kierowane żadnym algorytmem (chyba że umieszczonym w mózgu Newtona przez Boga lub Ewolucję, ale metodologia nauk nie zapuszcza się w takie tajniki). Trzeba więc przyznać, że było to kierowane intuicją. Z drugiej strony, tym więcej szans na dojście do głosu ma intuicja odkrywcy, im więcej algorytmów ma on do pomocy w swym myśleniu. Słowem, wymyślanie algorytmów wymaga intuicji posiłkującej się algorytmami.

Trzeba więc energicznie poszerzać zasięg stosowania algorytmów aż po najdalsze możliwe granice; gdzie jest granica, za którą otwiera się pole dla intuicji, też powie algorytm, jeśli go wymyśli intuicja. Dotyczy to nie tylko badań przyrodniczych lecz także społecznych. Nic więc nie powinno hamować poszukiwania matematycznych modeli procesów społecznych oraz prób symulacji cyfrowej tychże procesów. To jedna wskazówka badawcza. A druga jest ta, żeby być wymagającym, gdy idzie o dokładność odwzorowania badanej rzeczywistości (np. na ile równania Pareto pozwalają na sterowanie popytem z różnymi jego elementami natury politycznej, etycznej etc). Trzeba tak upraszczać świat w modelowaniu, żeby zyskiwać jak największą zrozumiałość i operatywność, a na tyle respektować jego złożoność, żeby nie pozbawiać się szans odpowiedzi na realne problemy.

Nawiązując do przytoczonych na wstępie wierzeń komputacjonistów, podsumujmy ten szkic konkluzją, że najbardziej owocne jest w nauce być komputacjonistą praktykującym, ale nie być wierzącym.

### Literatura cytowana

Devlin, Keith. *Logic and Information*, Cambridge University Press, Cambridge (Mass.) 1992.

Hartmanis J. and R.E. Stearns R. E. "On the computational complexity of algorithms", *Trans. Amer. Soc.*, 177 (1965), 285-306.

Hayek, Friedrich A. "The use of knowledge in society", *American Economic Review*, Vol. 35, No. 4 (September 1945), pp. 519-30.

Hodges, Andrew. *Alan Turing: the Enigma*, Walker and Company, New York, 2000.

Polski przekład W.Bartola, oparty na wydaniu 1984, ukazał się pt. *Enigma. Życie i śmierć Alana Turinga*, Prószyński i S-ka, Warszawa 2002. Fragmenty polskiego przekładu są dostępne pod adresem: [www.wiwi.pl/biblioteka/enigma\\_hodges/01.asp](http://www.wiwi.pl/biblioteka/enigma_hodges/01.asp).

Hodges, Andrew, "Uncomputability in the work of Alan Turing and Roger Penrose", 2002 (z daty ostatniej aktualizacji), [www.turing.org.uk/philosophy/lecture1.html](http://www.turing.org.uk/philosophy/lecture1.html)

Lange, Oskar. "On the economic theory of socialism", *The Review of Economic Studies* London 1936 and 1937. Reprinted in B. E. Lippincott (ed.), *On the Economic Theory of Socialism*, Minneapolis 1938 (2nd ed. 1970).

Lange, Oskar. "The computer and the market", in: C. H. Feinstein (ed.), *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, 1967, Cambridge University Press, pp. 158-161.

Liebrand, Wim, Andrzej Nowak and Rainer Hegselmann (eds.), *Computer Modeling of Social Processes*, London: Sage Publications, 1998.

Marciszewski, Witold. "Concepts-processing as a procedure of analog-digital conversion and digital-analog approximation" in: I. Max und W. Stelzner (herausgeb.) *Logik und Mathematik. Frege Kolloquium, Jena 1993*, de Gruyter, Berlin - New York, 1995.

Turing, A. M. "On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, series (2) 42, 1936, pp. 230-265.

Turing, A. M. "Systems of logic based on ordinals", *Proc. Lond. Math. Soc.* (2)45, 1939, pp. 161-228 [rozprawa doktorska Turinga, Princeton, 1938].